UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS - ABAETETUBA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRCIO SOUSA LOUSADA

# LOGARITMOS E APLICAÇÕES

ABAETETUBA-PA
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS - ABAETETUBA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRCIO SOUSA LOUSADA

# LOGARITMOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal do Pará – ABAETETUBA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional, sob orientação do Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro.

ABAETETUBA-PA
2022

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD**
**Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará**
**Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)**

S725l Sousa Lousada, Márcio.
LOGARITMOS E APLICAÇÕES / Márcio Sousa Lousada. — 2022.
40 f. : il.

Orientador(a): Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro
Coorientador(a): Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Campus Universitário de Abaetetuba, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Abaetetuba, 2022.

1. Logaritmos . 2. Interdisciplinaridade . 3. Conceitos. 4. Propriedades. 5. Aplicações . I. Título.

CDD 513.22

**MÁRCIO SOUSA LOUSADA**

# LOGARITMOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de curso, apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Pará – no Polo ABAETETUBA, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional.

Aprovado em ______ de ___________ de 2022.

**BANCA EXAMINADORA**

_______________________________________

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Orientador

_______________________________________

Prof. Dr. Anderson David de Sousa Campelo

Membro Externo

_______________________________________

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa

Membro Interno

_______________________________________

Prof. Dr. José Francisco da Silva Costa

Membro Interno

A Deus, a minha família, as pessoas que me apoiaram, a instituição UFPA e os docentes participantes dessa etapa.

**AGRADECIMENTO**

Agradeço primeiramente a Deus pela minha existência e força nos momentos difíceis, aos discentes do curso de mestrado profissional em especial ao amigo Nélio pelos conselhos, ao Corpo docentes do PROFMAT-Abaetetuba, pelos ensinamentos e Amizade, aos familiares e amigos que fizeram parte dessa trajetória, nos diversos momentos que a vida traz, agradeço a meu orientador pela paciência, estrutura, material e ensinamentos para desenvolver o trabalho, ao meu filho que nasceu durante o desenvolvimento deste trabalho, à minha esposa que me compreende e me apoia nos meus objetivos e ao meu pai que sempre esteve comigo. Agradeço a meu orientador pela paciência e grandes ensinamentos.

# RESUMO

Basicamente este trabalho divide-se em história, propriedades, aplicações e sugestão pedagógica dos logaritmos. Ao final, faz-se um nexo com as tendências pedagógicas atuais, mais reflexão e menos memorização de acordo com a BNCC, abrindo espaço para a criatividade. Com isso entende-se que os conhecimentos matemáticos formam uma sólida base a fim de desempenhar atividades científicas capazes de compreender fenômenos do dia-a-dia. Tais transformações estão ligadas diretamente às exigências que a sociedade coloca a homens e mulheres a partir da necessidade de compreensão e domínio dessas tecnologias. Com isso é imperativo que, conhecimentos matemáticos ajudem todos nós a desempenhar atividades científicas capazes de compreender fenômenos que fazem parte do nosso dia-a-dia. Portanto, estudar e entender os logaritmos tornou-se uma tarefa necessária para a compreensão do mundo em que vivemos. O cálculo de logaritmos e suas propriedades se apresentaram como algo inovador e estiveram no apogeu por muito tempo, principalmente, por ser um método que permitiu efetuar multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes com certa praticidade, no entanto, com o advento da calculadora e dos recursos computacionais, este e vários outros conceitos matemáticos já não são mais vistos como algo interessante e desafiador no Ensino Médio. Neste trabalho é apresentado um estudo histórico dos Logaritmos, dando ênfase para a construção do formalismo matemático, seus conceitos e propriedades, modelagem de fenômenos naturais, de modo que, tais conhecimentos sejam aplicados no ensino básico, olimpíadas de matemática etc.

Palavras-chave: Conceitos, propriedades, aplicações no ensino básico, logaritmos e interdisciplinaridade.

**ABSTRACT**

Basically this work on property history, divides applications and pedagogical suggestion logarithms. In the end, a link is made with current pedagogical trends, more and less reflection according to the BNCC, opening space for creativity. As a result, mathematical knowledge forms a solid basis for carrying out scientific activities capable of understanding the phenomena. Such transformations are directly linked to the demands that society and women place from the needs of understanding and domains of technologies. With this, it is essential that the mathematical knowledge of our day-to-day can act in all our efforts to understand the phenomenon that causes. Therefore, study and understand logarithms has become a necessity for understanding the world in which it is necessary. The log log calculation resembles, as something, and with many modifications, without apogee, method that match its characteristics, through a practical method and mainly with its characteristics, through a practical method, and mainly with its characteristics, through a practical method, and mainly with its characteristics, through a practical resource, which does not match its characteristics. and computational resources, this and several other mathematical concepts are no longer seen as something interesting and in High School. In this work, a historical study of Logarithms is presented, emphasizing the construction of mathematical formalism, its concepts and properties, modeling of natural phenomena, so that such knowledge is applied in basic education, or mathematics olympiads, etc.

Keywords: Concepts, properties, applications in basic education, logarithms and interdisciplinarity.

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O curso de mestrado em matemática foi escolhido com base no aproveitamento e reconhecimento adquirido tanto no ensino básico como no superior de colegas de classe e professores. O primeiro motivador surgiu quando alcancei destaque com brincadeiras lúdicas ainda no ensino fundamental 1 ( tangram, dama, tabuada, etc), como consequência ganhei afinidade, gosto e dedicação pela matemática que culminou na aprovação na EFOMM (Escola de oficiais da Marinha Mercante), formação em Ciências Náuticas onde percebi, mais facilidade de interpretar conteúdos matemáticos, por meio de reconhecimento e que poderia ir mais além.

A motivação para o tema deste trabalho ser logaritmos é originada na observação das novas tendências pedagógicas no ensino da matemática onde pede-se mais reflexão e menos memorização, nesse contexto os logaritmos ganham força pois permitem uma abordagem, mais clara, com ênfase na formação de conceitos relacionados ao cotidiano( por exemplo o limite auditivo).

Este Trabalho tem como objetivo geral o estudo do Logaritmos e Aplicações, começando com uma abordagem histórica do tema em questão que tem como gênese na Antiguidade, com a civilização Babilônica e seu desenvolvimento na Idade Média por volta do ano de 1545 através do Matemático Girolamo Cardano que publicou fórmulas algébricas para resolver equações logarítmicas (BOUGART, 1992). ZXS32

A proposta apresentada neste texto, traz algumas aplicações dos logaritmos em estudos de fenômenos naturais e matemática financeira e, assim, esperamos que tal esta proposta de intervenção, seja mais interessante e desperte no aluno uma curiosidade para melhor entender o mundo ao seu redor.

A pesquisa foi desenvolvida a fim de despertar no aluno uma visão ampla, que não se limite à sala de aula, sobre as aplicações do tema fazendo com que o aluno externe o conhecimento além da escola e conecte com o seu mundo.

De acordo com Lükde e André (1986), pesquisa é uma ocasião privilegiada de desenvolvimento intelectual que envolve a consulta por parte de um educando que obtém dados e conclusões obtidas em livros, jornais, vídeos entre outros e que depois serão confrontados com o conhecimento até ali já obtido academicamente.

Sobre a revisão bibliográfica, parte de qualquer que seja o trabalho de conclusão de curso, na prática se trata de ter embasamento sobre os autores que já defenderam a proposta da pesquisa aqui presente, além da originalidade ou contribuições extras com as investigações de dados do conjunto bibliográfico. A metodologia teve ênfase exploratória e se trata de uma pesquisa quando o discente busca conhecimento sobre um assunto que deseja ter afinidade, ou seja, busca entender como determinada ciência se desenvolveu e funciona.

Como o tema deste trabalho proporciona diversas aplicações que podem ser trabalhadas em sala de aula de maneira a abordar os meios em que os logaritmos se apresentam e a complexidade do ambiente escolar.

Conforme citado acima, devido a pesquisa com base em fichamento de livros, foi utilizado a abordagem para expandir conhecimento sobre diversos meios em que os logaritmos se apresentam. Nesse sentido tem-se o tipo de raciocínio indutivo pois as análises foram feitas a partir do ponto de vista do pesquisador e o embasamento de suas pesquisas.

No Capítulo 1, foi abordado de forma bem sucinta o contexto histórico em que os logaritmos aparecem, seu desenvolvimento e principais contribuições. No Capítulo 2, apresentamos de forma formal a definição de Logaritmos e principais propriedades. No Capítulo 3, apresentamos aplicações de logaritmos e sugestões pedagógicas sobre o tema.

# 1 CONTEXTO HISTÓRICO

Os logaritmos possuem um contexto histórico muito interessante onde várias ciências se misturam e a sociedade assim como as nações competem nos seus mercados. Abordar esse contexto interliga geopolítica a matemática.

Segundo boletim cearense (2017) O contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos é marcado pelo renascimento, período das grandes navegações e grandes outras descobertas no ramo da astronomia e economia. Como bem nos assegura ARRUDA; PILETTI (1998), Contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos é um marco na história da humanidade onde o ser humano troca o pensamento mais emocional pelo racional, cientifico e comprovável.

Para SILVA (2008, p. 27) Contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos facilita entender o quão importante foi o surgimento dos logaritmos:

> Contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos permite Daí em diante, os cálculos se tornaram bastante complexos, pois o homem resolveu ir mais longe, além dos horizontes, através das navegações, auxiliado pela astronomia, com seus miraculosos cálculos, também com o surgimento do mercado financeiro, onde o volume de transações entre as nações fez desenvolver a globalização comercial.

Como se pode verificar nessa citação, o contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos é aplicado numa abordagem em sala de aula. Evidentemente a aplicação pode ser utilizada para fazer o aluno entender como se deu a necessidade dos logaritmos e a importância da sua descoberta.

Ainda para SILVA (2008), nesse sentido, Contexto sociocultural do surgimento dos logaritmos permite entender como recorria a matemática para soluções de problemas e extratos das fases pela qual passou os logaritmos. Logo, é importante compreender essa evolução e acompanhar as tendências atuais para melhor abordar este tema.

## 1.1 Pioneiros na História dos Logaritmos

Os traços de logaritmos estão relacionados a povos da Antiguidade. Há indícios de que os Babilônios estabeleceram uma tabela logarítmica, e Arquimedes, ao se deparar com grandes números, fez uma citação importante para a elaboração do conceito inicial de logaritmos (SILVA, 2016).

A primeira menção de matemática avançada e organizada remonta à Babilônia e ao Egito no terceiro milênio a.C. A inovação mais importante dos gregos foi a invenção da matemática abstrata, que começou em Mileto e Tales de Pitágoras no século VI a.C. Euclides escreveu Os Elementos, no final do século IVa.C, nele continha a maior parte do conhecimento matemático da época. Pode-se verificar pelos escritos de Arquimedes e Apolônio que o século seguinte foi marcado pelo grande desenvolvimento da matemática (VASCONCELOS, 2011).

O progresso dos matemáticos árabes e a tradução dos gregos antigos foram as principais razões para o desenvolvimento da matemática na Idade Média. Em 1545, quando o italiano Girolamo Cardano publicou fórmulas algébricas para resolver equações, ele despertou o interesse dos matemáticos pelos números complexos e inspirou a busca de soluções semelhantes para equações de quinta ordem ou de ordem superior. Também no século XVI, a matemática moderna e os símbolos algébricos começaram a ser usados (BOUGART, 1992).

O desenvolvimento de logaritmos é considerado uma das grandes conquistas da matemática no início do século XVII. Seu surgimento se deve à necessidade de simplificar alguns cálculos matemáticos complexos que exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos em simples operações, principalmente devido ao desenvolvimento da astronomia e do comércio, provocados pelas grandes navegações (SILVA, 2016).

De acordo com Eves (2004), a astronomia, a navegação, o comércio, a engenharia e a guerra aumentaram a demanda de maneira constante por esses cálculos mais rápidos e precisos.

O poder dos logaritmos como ferramentas computacionais é que eles simplificam a multiplicação e divisão em operações simples de adição e subtração, trazendo expressivos benefícios para esse campo (EVES, 2004).

A palavra logaritmo significa "o número de razões", é uma combinação de dois termos gregos - *logos* e *arithmos,* onde *logos* significa racionalidade e *arithmos* significa número, o estudioso John Napier usa-o para substituir o nome que ele usava originalmente: "Números Artificiais" (EVES, 2004).

Nos subtópicos a seguir, apresenta-se informações sobre os personagens que através de suas pesquisas apresentaram contribuições importantes para o desenvolvimento de logaritmos.

### 1.1.1 John Napier (1550 – 1618)

Se associa muito o nome de Napier aos logaritmos apesar da finalidade distinta que ele pensou. O método de Napier é composto de métodos geométricos, combinando, progressão geométrica e aritmética, sem expoentes. Ele não trabalha com o conceito de base, Napier não pensou numa base para seu sistema, mas suas tabelas eram compiladas por multiplicações repetidas, equivalentes a potências de 0,9999999.

Napier (1550 - 1618), um matemático escocês, nasceu no Castelo de Murchiston em 1550. Estudou na Europa, e adquiriu conhecimento da literatura clássica e matemática, estudou os princípios básicos dos símbolos numéricos e a história dos símbolos árabes. Em 1590, Napier tinha um entendimento completo da correspondência entre as progressões geométricas e as séries aritméticas. Suas pesquisas foram essenciais para o desenvolvimento de logaritmos, e seu trabalho foi publicado em 1614 (SILVA, 2016).

Para Eves (2004), John Napier era considerado profeta, pois previu que no futuro iriam construir equipamentos e tanques de navegação subaquática, fato este que ocorreu durante a Primeira Guerra Mundial.

Napier concentrou sua energia nas problemáticas políticas e religiosas, sendo acusado de praticar magia negra após alegar que o papa da época era um anticristo, todavia, quando não estava envolvido em polêmicas sociais, dedicava-se ao estudo das ciências e matemática. Napier também inventou a vírgula decimal, o conceito de zero e o princípio da notação, conceitos tão importantes para matemática quanto os algarismos arábicos.

Devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários, Napier teve uma influência muito maior no desenvolvimento de logaritmos do que Burji. Napier trabalhou em sua invenção de logaritmos deste 1594 e não publicou seus resultados até o final de 1614.

Seu trabalho foi publicado em 1614 sob o título *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). Depois de tornado público, foi utilizado por toda a Europa e difundido por muitos estudiosos neste período.

A maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada em toda a Europa. Especialmente na astronomia, a idade dessa descoberta já passou há muito tempo. Porque, como disse Laplace, a invenção dos logaritmos "dobrou a vida útil dos astrônomos ao reduzir a carga de trabalho". Bonaventura Cavalieri (...) se dedica a promover logaritmos na Itália. John Kepler da Alemanha e Edmund Wingate da França fizeram um trabalho semelhante (EVES, 2004).

Por causa dos cálculos extremamente cansativos para construir as tábuas da navegação e da astronomia, Napier sentiu-se incentivado a inventar algumas metodologias e instrumentos que facilitariam esses cálculos.

O estudioso atingiu seu objetivo, simplificando as operações de multiplicação e divisão, operações que eram "essencialmente tão básicas" que eram consideradas impossíveis de simplificar. No entanto, através de logaritmos, qualquer problema neste nível, por mais difícil que parecesse, poderia ser reduzido às simples operações de adição e subtração (MARTINS, 2000).

### 1.1.2 Henry Briggs (1561 – 1631)

Briggs era matemático, professor de geometria e ficou tão impressionado com o poder dos logaritmos inventado por John Napier, que o visitou na Escócia para discutir possíveis modificações no método logarítmico (BOYER, 1996). Na reunião em Edimburgo, Napier e Briggs concordaram em realizar duas mudanças, sendo elas a modificação da tabela para que o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência de 10, tornando-os mais úteis, deste modo, resultou o logaritmo briggsiano, ou seja, o logaritmo utilizado nos dias atuais (EVES, 2004).

O Napier devido sua idade avançada, já não possuía energia para dar continuidade a suas pesquisas, deste modo essa tarefa ficou a cargo de Briggs. Em 1617, Briggs publicou seu *Logarithmorum Chilias*, no qual consistia em uma tabela de 10 logaritmos de 1 a 1000 com 14 casas decimais.

Em 1624 Briggs publicou a *Arithmetica logarítmica*, ampliando a tabela para números inteiros de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, mantendo a precisão de 14 casas decimais. Adriaan Vlacq, em 1628, publicou a segunda edição da obra, preenchendo a lacuna entre 20000 e 90000, essa obra se tornou padrão durante três séculos.

### 1.1.3 Jobst Bürgi (1552 –1632)

Esses três estudiosos, Napier, Briggs e Bürgi, colaboraram com o desenvolvimento e a disseminação de logaritmos quando a simplificação das operações aritméticas era a base para o avanço da astronomia e da navegação. Mas hoje, mesmo com o advento dos computadores, os logaritmos, especialmente as funções logarítmicas, ainda desempenham um papel importante.

Burgi (1552 – 1632), suíço proprietário da fábrica de relógios Swiss, e matemático, destacou-se por desenvolver em 1620, paralelamente a Napier, uma pesquisa contendo uma tabela logarítmica. Bürgi pesquisou independentemente, porém, as ideias principais eram semelhantes. Seu método diferencia-se apenas por consistir em métodos algébricos, o logaritmo de Bürgi está mais próximo do logaritmo estudado hoje.

Segundo Boyer (1996), algumas pessoas da comunidade acadêmica ainda acreditam que a invenção do logaritmo é pesquisa de apenas uma pessoa, no entanto, Napier foi apenas o primeiro estudioso a publicar seu trabalho. O crédito pela criação do logaritmo, em última análise, pertence a Napier, pois, de fato, foi o primeiro a publicar uma obra tendo como temática o logaritmo. Ainda segundo o autor, Bürgi iniciou seus estudos em 1588, seis anos antes de Napier, porém, só publicou seus resultados oito anos após a publicação do *Descriptio* de Napier.

A diferença entre as duas obras está principalmente nos termos e valores que usam, pois, seus princípios básicos são os mesmos. Bürgi escolheu um número ligeiramente maior e no lugar de realizar a multiplicação da potência do número por $10^7$, Bürgi multiplica por $10^5$, outra pequena diferença encontra-se na tabela, onde o matemático multiplica todos os seus expoentes de potência por 10 (MARTINS, 2000).

### 1.2 Desenvolvimento do raciocínio matemático

A matemática se desenvolveu naturalmente com a necessidade humana de utilizar números para quantificar coisas e essa evolução se dava constantemente com desafios que surgiam no interesse da sociedade e dos estudiosos de matemática de facilitar contas para os comerciantes, diminuir o tempo gasto com cálculos na astronomia, entre outros. Isso tudo, foi ganhando cada vez mais importância com destaque para as grandes navegações onde cálculos precisos valiam muito pois se tratavam de viagens de distâncias continentais, logo a nação que obtinha mais domínio de matemática consequentemente estava a frente no quesito navegar, e o grande instrumento de cálculo se deu com os logaritmos, que a princípio se tratavam de tábuas com cálculos precisos e úteis nesses avanços.

Boyer (1974) no livro História da Matemática, faz colocações que descrevem a história da geometria que vem ao encontro do que diz Eves (1997), também descreve que a geometria teve sua origem no Egito, e seu surgimento veio da necessidade de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio Nilo. As inundações anuais sobrepunham-se sobre o Delta do referido rio. Ano após ano o Nilo transbordava seu leito natural, espalhando um rico limo sobre os campos ribeirinhos.

De acordo com Boyer (1974), para resolver esta situação, os faraós passaram a nomear funcionários, os agrimensores, cuja tarefa era avaliar prejuízos das cheias, medir as terras e fixar os limites das propriedades, restabelecendo as fronteiras entre as diversas propriedades, refazendo os limites de suas áreas de cultivo. No momento de refazer os limites, os agrimensores tinham apenas informações parciais ou até mesmo nenhuma, pois as fronteiras podiam ter sido destruídas por completo.

Estes agrimensores acabaram por aprender a determinar áreas de terrenos dividindo-os em retângulos e triângulos, e quando se deparavam com superfícies irregulares utilizavam o método de triangulação, (dividir um campo em porções menores e triangulares cujas áreas somadas correspondiam à área total).

Segundo Boyer (1974), os egípcios tinham muita habilidade em delimitar terras e com isso descobriram e utilizaram inúmeros princípios. Um destes princípios era utilizado para marcar ângulos retos, onde usavam cordas cheias de nós equidistantes um do outro, fazendo assim a divisão das terras. Essa técnica empírica, para obter resultados aproximados, mais tarde viria a ser demonstrada pelo teorema de Pitágoras.

Percebe-se que, no decorrer da história, a geometria sempre teve muita importância em vários sentidos, facilitando a vida do homem. Nos dias atuais, a geometria é um componente essencial para a construção da cidadania, pois a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e tecnológicos.

### 1.3 Visão sobre logaritmo na atualidade

Os logaritmos se encontram atualmente em um nível avançado de abstração para seu uso, sua importância mudou de razão, antes utilizado para facilitar contas e então substituídos por calculadoras, esse conteúdo matemático tornou-se necessário para quantificar e qualificar fenômenos naturais e formalizar escalas de crescimento ou decrescimento exponenciais.

Segundo Lima (1996) logaritmo é foi uma nova nomenclatura matemática que observava. Como bem nos assegura Eves (2004), logaritmo é um marco na evolução e velocidade com contas matemáticas extensas e que mais tarde viria a ser superado pela calculadora.

Para Lima (1996, p. introdução) o logaritmo facilita linearizar curvas exponenciais, sendo assim um método relevante para formular escalas e estudar crescimento (ou decrescimento) nesse sentido. Além de estar, hoje, mais presente na análise matemática:

> Logaritmo permite (...)a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional a quantidade daquela grandeza existente num dado momento. Os logaritmos, que durante 3 séculos e meio tão bem desempenaram o papel de maravilhoso instrumento para simplificar o cálculo aritmético (...) hoje ocupado com grande êxito pelas maquininhas eletrônicas. Apesar disso, os logaritmos continuam, por motivos bem diversos, a merecer uma posição de destaque no ensino da matemática, devido a posição central que ocupam nesta ciência e suas aplicações. Essa posição é permanente porque a função logaritmo e suas inversa, a função exponencial permitem a única maneira descrita acima.

Como se pode verificar nessa citação, o logaritmo é aplicado em diversas leis matemáticas e fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos. Evidentemente a aplicação pode ser utilizada para estudar comportamentos numéricos exponenciais, crescentes ou decrescentes, presentes na natureza, economia e análise matemática.

Funciona como função inversa da função exponencial, apesar de o conceito de função ser divulgado depois de logaritmo e logaritmo nas suas primeiras aparições ser usado como facilitador aritmético. Cita-se, como exemplo, dado $3^2 = 9$ pode se escrever que $log_3^9 = 2$.

Ainda para Lima (1996, p. 2):

> a utilidade original dos logaritmos resulta, portanto, da seguinte observação: o trabalho de elaborar uma tábua de logaritmo, por mais longo e cansativo que seja, é um só. Depois dele executado, ninguém precisa mais, digamos efetuar multiplicações; adições bastam. Nesse sentido, o logaritmo permite uma aritmética inversa de exponenciação e a decodificação das informações de uma curva geométrica.

Logo, é importante compreender que a princípio logaritmos tinham como intenção facilitar contas que astrônomos, comerciantes e outros faziam com frequência. Com a invenção da calculadora, o logaritmo se restringiu mais à teoria, análise matemática e suas aplicações. Nesse sentido, vamos exemplificar o logaritmo como decodificador de informações contidas e curvas exponenciais, presentes na natureza e na economia.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

## 2.1 Definição do Logaritmo

Logaritmo é o expoente de um número (base), indicando a potência a que se deve elevá-lo para se obter, como resultado, outro número.

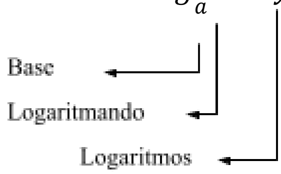
A palavra logaritmo foi inventada por Napier a partir das palavras *logos*= razão e *aritmos*= números, ou seja, o que mais tarde foi interpretado do latim como "números que evoluem".

Para definirmos bem o logaritmo, há algumas restrições sobre os valores da base e do logaritmando. A base de um logaritmo sempre deve ser um número positivo e diferente de 1, e o logaritmando deve ser sempre um número positivo.

Definição: Dados um número real $a > 0$ e $a \neq 1$, o **logaritmo** de um número real $x > 0$ na base $a$ é o expoente $y$ que se deve elevar de tal modo que $a^y = x$.

*Escreve-se* $y = log_a x$ *e lê-se* $y$ *é o logaritmo de* $x$ *na base* $a$.

$$log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$




Exemplos:

- $log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81.$
- $log_5 125 = 3 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

## 2.1 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

**Propriedades:**

1. $log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
2. $log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$
3. $log_a x = log_a y \Rightarrow x = y$
4. $log_a a^k = k \Leftrightarrow a^k = a^k$

5. $a^{\log_a x} = x$
6. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
7. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
8. $\log_a x^k = k.\log_a x$
9. $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$

Casos Particulares de Logaritmo:

1. **Logaritmo do número 1:**

Como todo número elevado a 0 é igual a 1, então o logaritmo de qualquer base, cujo **logaritmando seja igual a 1**, terá sempre o resultado igual a 0.

$$\log_a 1 = 0,\ pois\ a^0 = 1$$

Exemplo:

• $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

2. **Logaritmo com base igual:**

Como todo número elevado a 1 é ele mesmo, então quando o logaritmando é igual à base, o logaritmo será sempre igual a 1.

$$\log_a a = 1,\ pois\ a^1 = a$$

Exemplo:

$$\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$$

3. **Dois logaritmos com a mesma base** são iguais quando os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a x = \log_a y,\ então\ x = y,\ pois\ a^z = x\ e\ a^z = y$$

Exemplo:

$$\log_a 8 = \log_a b \Leftrightarrow b = 8$$

4. **O logaritmo de uma potência da base** é o expoente, em qualquer base.

$$\log_a a^k = k \Leftrightarrow a^k = a^k$$

Pois, $log_a a^k \Rightarrow k.\, log_a a = k.1 = k.$

Exemplo:

$$log_4 4^5 \Rightarrow 5.\, log_4 4 = 5.1 = 5$$

**5. Expoente Logaritmo:**

Uma potência de base **a** e expoente igual a logaritmo de **x** na base **a**, é igual a **x**.

$$a^{log_a x} = x$$

Pela definição:

$$a^{log_a x} = x \Rightarrow log_a x = log_a x$$

Exemplo:

$$3^{log_3 81} = 81$$

**Propriedade dos Logaritmos:**

Existem casos em que a simples aplicação da definição não é o suficiente para resolvê-los, então, para isso, foram desenvolvidas algumas propriedades que facilitam essa resolução. O domínio dessas ferramentas é essencial para a resolução dos problemas sobre esse tema e para utilizar-se de logaritmos a fim de solucionar equações exponenciais de bases diferentes.

Considere X e Y dois números reais positivos e diferentes de 1 para todas as propriedades dos logaritmos a seguir.

**6. Propriedade de um Produto**

O logaritmo de um produto pode ser separado na adição do logaritmo de mesma base de cada um dos fatores.

$$log_a xy = log_a x + log_a y$$

*Demonstração.* Vamos inicialmente chamar

$$log_a x = v \text{ e } log_a y = z$$

temos pela definição de logaritmo que

$$a^v = x \quad \text{e} \quad a^z = y$$

Multiplicando $a^v$= e $a^y$= teremos

$$a^v a^z = xy \Leftrightarrow a^{v+z} = xy,$$

finalmente aplicando a definição de logaritmos temos

$$log_a xy = v + z$$

substituindo novamente teremos:

$$log_a xy = log_a x + log_a z$$

Exemplo:

$$log_3(9.27) = log_3 9 + log_3 27 = 2 + 3 = 5$$

## 7. Propriedade do Quociente

Muito parecida com a anterior, o logaritmo de um quociente pode ser separado com a subtração dos logaritmos de mesma base do numerador pelo denominador, nessa ordem.

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$

*Demonstração.* Vamos inicialmente chamar

$$log_a x = v \text{ e } log_a y = z$$

Temos pela definição de logaritmo que

$$a^v = x \quad \text{e} \quad a^z = y$$

Dividindo $a^v$= e $a^y$= teremos

$$\frac{a^v}{a^z} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow a^{v-z} = \frac{x}{y}$$

Finalmente aplicando a definição de logaritmos temos

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right)v - z$$

Substituindo novamente teremos:

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$

Exemplo:

• $log_3\left(\frac{9}{27}\right) = log_3 9 - log_3 27 = 2 - 3 =- 1$

**8. Propriedade de uma Potência:**

Sempre que houver um expoente no logaritmando, o logaritmo de uma potência será igual à multiplicação desse expoente pelo logaritmo.

$$log_a x^k = k. log_a x$$

*Demonstração.* Vamos inicialmente chamar

$$log_a x = v$$

Temos pela definição de logaritmo que

$$a^v = x$$

Substituindo, teremos:

$$log_a\left(x^k\right) = log_a\left(a^v\right)^k = log_a a^{v.k} = vk$$

Considerando que:

$$v = log_a x$$

Substituindo novamente teremos:

$$log_a x^k = klog_a x$$

Exemplo:

$$log_3\left(9^2\right) = 2. log_3 9 = 2. 2 = 4$$

**9. Propriedade da Potência da Base**

$$log_{a^m} B = \frac{1}{m} log_a B$$

*Demonstração.* Vamos inicialmente chamar

$$log_{a^m}B = k$$

Temos pela definição de logaritmo que

$$\left(a^m\right)^k = B$$

Desenvolvendo:

$$\left(a^m\right)^k = \left(a^k\right)^m \Rightarrow a^k = B^{\frac{1}{m}}$$

Considerando que:

$$a^k = B^{\frac{1}{m}} \Rightarrow log_a B^{\frac{1}{m}} = \mathrm{k}$$

Conforme a demonstração acima:

$$log_a B^{\frac{1}{m}} = \mathrm{k} \Rightarrow \frac{1}{m} log_a B = k$$

Substituindo novamente teremos:

$$log_{a^m}B = \frac{1}{m} log_a B$$

# 3 APLICAÇÕES LOGARÍTMICAS

Os logaritmos possuem aplicações em diversas áreas do conhecimento, como na própria Matemática, em Química, Biologia, Geografia etc. Por meio de exemplos, demonstraremos a utilização dessas técnicas de logaritmos na busca de resultados para as variadas situações em questão.

BNCC (pág 6),"é possível perceber que um mesmo tema volta a ser tratado em diferentes momentos da trajetória escolar, mas com uma complexidade e uma profundidade maior a cada ano". Com base nisso exemplificaremos diversos níveis de aplicação dos logaritmos.

BNCC(pág 5), no capítulo mais reflexão e menos memorização convida os docentes e discentes a pensar a partir das informações recebidas, de analisá-las e de responder com uma postura ativa. Embora os logaritmos tenham sido inventados para a conveniência do cálculo, o uso extensivo dos logaritmos hoje é a sua aplicação, alguns deles serão objetos de pesquisa deste trabalho, vale lembrar que apesar dos cálculos expostos, há grande importância em interpretar os problemas e resultados.

BNCC( pág 7), "O importante é que os procedimentos sejam inseridos em uma rede de significados mais ampla na qual o foco não seja o cálculo em si, mas as relações que ele permite estabelecer entre os diversos conhecimentos que o aluno já tem"

Para os alunos do ensino médio, é mais interessante encontrar cenários de aplicação que envolvam os novos conceitos que estão aprendendo, pois estimula o desenvolvimento da matéria e facilita o entendimento dos alunos. Portanto, nossa recomendação de trabalho para professores do ensino médio é usar o conjunto de aplicativos descrito neste capítulo como um elemento motivacional para introduzir logaritmos de uma forma mais específica. Ao mesmo tempo, os professores podem aprofundar a natureza e os resultados desse conceito, principalmente a ideia de área de uso, ou seja, utilizando os capítulos anteriores.

BNCC(pag 23), " Muito além dos cálculos, da aplicação de fórmulas e da leitura da realidade que nos cerca, a BNCC propõe um novo lugar para a Matemática. O foco é o letramento matemático dos alunos. Letramento matemático significa desenvolver habilidades de raciocínio, representação, comunicação e argumentação, para que o aluno possa assumir uma postura ativa nos mais diferentes contextos"

Observa-se que as funções logarítmicas e exponenciais podem ser associadas aos fenômenos naturais, cálculos financeiros ou usadas para encontrar soluções de problemas com fins didáticos. Esta parte do trabalho enfoca, principalmente, a apresentação dos logaritmos no estudo de fenômenos da natureza.

Conforme visto no Capítulo 1, é importante que as Atividades propostas sejam elaboradas sempre pensando na articulação das Tendências Metodológicas vistas. Aqui, iremos explorar essas tendências articuladamente e naturalmente, conforme o desenvolvimento e resolução das atividades propostas. Utilizaremos a notação log para indicar log10, ou seja log x para indicar log10 x como no Anexo A e ln x para indicar loge x.

## 3.1 Exemplo - Juros Contínuos

A matemática financeira é o campo da matemática que estuda as mudanças na moeda ao longo do tempo. Historicamente, está relacionado ao desenvolvimento do comércio e decorre do fato de que as pessoas devem não apenas realizar transações financeiras no presente, mas também considerar as necessidades futuras.

Na civilização primitiva, os seres humanos obtinham os produtos através da natureza para sobreviver, não era comum relações comerciais. No momento em que diferentes tribos iniciaram a comunicação, juntamente iniciou-se a troca de mercadorias, dos excedentes de cada grupo, porém o valor do produto naquele momento não importava, deste modo, surgiu o escambo, uma das primeiras formas conhecidas de negócios.

Com o passar dos tempos, surgiram os comerciantes e o interesse pelo acúmulo de moedas estrangeiras, pois possuíam poder de compra, além de realizar as atividades de troca ou câmbio de dinheiro, surgindo então os "cambistas". Posteriormente, surgiu a ideia de emprestar "dinheiro" por um determinado período e recebiam uma recompensa. A partir do processo de cobrança de pagamentos adicionais, podem ser comprovados lucros, ganhos ou juros. Portanto, descreve de forma bem básica o que é a primeira operação de crédito.

A matemática financeira está estritamente ligada ao valor do dinheiro no tempo. Para efeito de cálculo, o valor representado pela mesma data é uma quantidade que pode ser comparada e adicionada algebricamente, e os valores com datas futuras ou passadas, só poderão ser somados ou comparados, se ajustados para o valor presente.

Deste modo, surge a ideia de regime de juros, no caso desta pesquisa, destaca-se os juros compostos, os juros de cada período, quando não são pagos no final do período referido, devem ser somados ao capital inicial e passa a render juros, este método é chamado de capitalização. Desse modo, temos que:

Para $n = 1,$ no 1º período de capitalização, temos:

- Capital inicial = $PV$
- Juros do período = $PV.\,i$
- Capital no final, temos:

  $FV = PV(PV.\,i) = PV(1 + i)$

Para $n = 2,$ no 2º período de capitalização, temos:

- Capital inicial = $PV(1 + i)$
- Juros do período = $PV(1 + i).\,i$
- Capital no final, temos:

  $FV = PV(1 + i) + PV(1 + i).\,i = PV(1 + i).\,(1 + i)$

Deste modo, podemos dizer que para n = 2, teremos:

$$FV = PV(1 + i)^2$$

Para $n = 3,$ no 3º período de capitalização, temos:

- Capital inicial = $PV(1 + i)^2$
- Juros do período = $PV(1 + i)^2.\,i$
- Capital no final, temos:

$$FV = PV(1 + i)^2 + PV(1 + i)^2.\,i = PV(1 + i)^2.\,(1 + i)$$

Deste modo, podemos dizer que para n = 2, teremos:

$$FV = PV(1 + i)^3$$

No enésimo período, o valor futuro (FV) ou montante (M), deverá ser encontrado de modo semelhante aos períodos anteriores. Portanto, o valor futuro da aplicação do capital PV, em n períodos e a taxa de juros i em cada período pode ser obtido pela seguinte equação:

$$FV = PV(1 + i)^n ou\, M = PV(1 + i)^n$$

Nesta equação, i refere-se à mesma unidade de tempo utilizada para os n períodos, note que se n tender ao infinito, ou seja, com os juros capitalizados a cada instante, continuamente. Expressando o valor futuro ou montante, ao final de n períodos, como uma função exponencial do capital aplicado.

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 em uma instituição bancária, que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00?

Resolução: Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das técnicas de logaritmos é imprescindível.

Fórmula para o cálculo dos juros compostos: M = C·(1 + i)$^t$. De acordo com a situação-problema, temos:

$$M\ (montante)\ =\ 3500$$

$$C\ (capital)\ =\ 500$$

$$i\ (taxa)\ =\ 3,5\%\ =\ 0,035$$

$$t\ =\ ?$$

$$M\ =\ C.(1\ +\ i)^t$$

$$3500\ =\ 500.(1\ +\ 0,035)^t$$

$$\frac{3500}{500} = 1,035^t$$

$$1,035^t\ =\ 7$$

Aplicando o **logaritmo**:

$$log\ 1,035^t\ =\ log\ 7$$
$$t.\ log\ 1,035\ =\ log\ 7$$
$$t.\ 0,0149\ =\ 0,8451$$
$$t\ =\ 0,8451/0,0149$$
$$t\ =\ 56,7$$

O montante de R$ 3 500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

### 3.1.1 Sugestão pedagógica

Um Certificado de Depósito Bancário (CDB) tem um valor de resgate de R$10000, 00 e um prazo de 90 dias, a decorrer até o seu vencimento. Calcule o valor a ser aplicado nesse papel para que a sua taxa de remuneração efetiva seja de 10% ao ano.

Solução: Calcularemos a taxa de juros diária, equivalente a 10% a.a. Durante um ano, os R$ 100,00 com taxa de 10% a.a. terá um montante de R$110,00. A taxa diária estudada é aquela que faz R$ 100,00 se transformarem em R$ 110, 00, em um prazo de 360 dias. Deste modo, temos:

$$PV\ =\ R\$100,00$$

$$FV\ =\ R\$110,00$$

$$n\ =\ 360\ dias$$

$$i\ =?$$

Aplicando na expressão deduzida anteriormente, temos que:

$$FV = PV(1 + i)^{n}$$

$$110 = 100(1 + i)^{360}$$

$$1,1 = (1 + i)^{360}$$

Aplicando ln em ambos os lados, tem-se:

$$ln(1,1) = ln\left((1 + i)^{360}\right)$$

$$ln(1,1) = 360. ln(1 + i)$$

$$0,09531 = 360. ln(1 + i)$$

$$\frac{0,09531}{360} = ln(1 + i)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados, temos:

$$e^{0,000265} = e^{ln(1+i)}$$

Sendo $e^{ln(1+i)} = 1 + i$, tem-se:

$$1,000265 = 1 + i$$

$$i = 0,000265$$

$$i = 0,0265\%\ ao\ dia.$$

Para o cálculo do valor da aplicação, utiliza-se os dados fornecidos pelo problema e a taxa diária encontrada.

$$10000 = PV(1 + 0,000265)^{90}$$

$$10000 = PV(1,000265)^{90}$$

$$\frac{10000}{(1,000265)^{90}} = PV$$

Aplicando ln em ambos os lados, temos:

$$ln\left(\frac{10000}{(1,000265)^{90}}\right) = ln(PV)$$

$$ln(10000) - ln(1,000265)^{90} = ln(PV)$$

$$ln(10000) - 90\ ln(1,000265) = ln(PV)$$

Aplicando o exponencial de base e em ambos os lados, temos que:

$$e^{ln(10000) - 90 ln(1,000265)} = e^{ln(PV)}$$

$$e^{ln(10000)}. e^{-90 ln(1,000265)} = PV$$

$$10000. e^{-90.0,000265} = PV$$

$$10000. e^{-0,0238} = PV$$

$$10000.\,0,976435\ =\ PV$$

$$PV\ =\ 9764,35$$

Deste modo, o valor da aplicação no CDB, deverá ser de R$ 9764,35.

Um investimento rende juros compostos a uma taxa de 6% ao ano. Depois de quantos anos, um valor inicial de R$ 1.000,00 chegará ao valor de R$ 10.000,00 com esse investimento? (Use log (1,06) = 0,025). Considerando que o rendimento é através do regime de juros compostos, e utilizando a fórmula para o cálculo do montante, temos:

$$M\ =\ PV(1\ +\ i)^{n}$$

$$10000\ =\ 1000(1\ +\ 0,06)^{n}$$

$$10000\ =\ 1000(1,06)^{n}$$

$$10\ =\ (1,06)^{n}$$

Utilizando ln em ambos os lados, temos que:

$$ln10\ =\ ln(1,06)^{n}$$

$$1\ =\ n.\,ln1,06$$

$$1\ =\ n.\,0,025$$

$$n\ =\frac{1}{0,025}$$

$$n\ =\ 40$$

Observa-se assim que após 40 anos, o valor investido, chegará no montante esperado.

## 3.2 Exemplo – Geografia

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população dessa cidade dobrará, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

População do ano-base = P0

População após um ano = P0·(1,03) = P1

População após dois anos = P0·$(1,03)^2$= P2

População após x anos = P0·$(1,03)^x$ = Px

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim, temos:

$$P_{x}\ =\ 2.\,P_{0}$$

$$P_{0}(1,03)^{x}\ =\ 2.\,P_{0}$$

$$1,03^{x}\ =\ 2$$

Aplicando **logaritmo**:

$$log\,1,03^{x} = log\,2$$

$$x.\,log\,1,03 = log\,2$$

$$x.\,0,0128 = 0,3010$$

$$x = 0,3010/0,0128$$

$$x = 23,5$$

A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

## 3.3 Exemplo – Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, reduza-se a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0.\,e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

$$Q = Q_0.\,e^{-rt}$$

$$200 = 1000.\,e^{-0,02t}$$

$$200/1000 = e^{-0,02t}$$

$$1/5 = e^{-0,02t}\ (aplicando\ definição)$$

$$-\ 0,02t = log_e 1/5$$

$$-\ 0,02t = log_e 5^{-1}$$

$$-\ 0,02t =-\ log_e 5$$

$$-\ 0,02t =-\ ln\,5\,(-\ 1)$$

$$0,02t = ln\,5$$

$$t = ln\,5\ /\ 0,02$$

$$t = 1,6094\ /\ 0,02$$

$$t = 80,47$$

A substância levará 80,47 anos para reduzir-se a 200 g.

## 3.4 Desintegração radioativa

Segundo Lima (2009), os átomos de substâncias radioativas como, por exemplo, o urânio e o rádio tendem naturalmente a se desintegrar emitindo partículas, transformando-se em uma substância não radioativa. Desta forma, na medida em que o tempo passa, a quantidade de material existente neste corpo se desintegra de maneira proporcional à massa da substância original. A constante de proporcionalidade que, também, é chamada de constante ou taxa de desintegração é determinada experimentalmente, e cada substância radioativa possui sua própria constante de desintegração.

Em outras palavras, materiais radioativos têm uma tendência natural para se decompor e se tornarem outro material não radioativo. Portanto, com o tempo, a quantidade da substância original diminuirá (aumentando assim a massa da substância recém-transformada). A quantidade de material decomposto do objeto radioativo é proporcional à massa do material original presente no corpo naquele momento. A constante proporcional α é estabelecida por meio de experimentos, todo material radioativo tem sua constante de decaimento α.

Na natureza, existem 92 elementos. Cada elemento pode ter quantidades diferentes de nêutrons. Os núcleos com mesmo número de prótons, mas que diferem no número de nêutrons, são denominados isótopos de um mesmo elemento. Para determinadas combinações de nêutrons e prótons, o núcleo é estável – nesse caso, são denominados isótopos estáveis. Para outras combinações, o núcleo é instável (isótopos radioativos ou radioisótopos) e emitirá energia na forma de ondas eletromagnéticas ou de partículas, até atingir a estabilidade.

Consideremos um corpo de massa $M_0$, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processasse instantaneamente, no fim de cada segundo, sendo $M_0$ a massa no tempo t = 0, decorrido o tempo t = 1 segundo, haveria uma perda de $\alpha M_0$ unidades de massa, restando apenas a massa

$$M_1 = M_0 - \alpha M_0 = M_0(1 - \alpha)$$

Seguindo o raciocínio após 2 segundos teríamos:

$$M_2 = M_1(1 - \alpha) = M_0(1 - \alpha)^2$$

Continuando o processo, passados s segundos teríamos:

$$M_s = M_0(1 - \alpha)^s$$

Podemos descrever também como:

$$M(t) = M_0$$

Portanto, se conhecemos a meia-vida do elemento radioativo, sabemos em quanto tempo sua massa inicial se reduz à metade, ou seja, sendo $t_{\frac{1}{2}}$ a meia-vida do elemento, sabemos que:

$$\frac{1}{2}M_0 = M_0 . e^{-\alpha t} \rightarrow ln\left(\frac{1}{2}\right). \frac{M_0}{M_0} =- \alpha . t_{\frac{1}{2}} . ln(e)$$

Deste modo, temos que:

$$\alpha = \frac{ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$$

### 3.4.1 Sugestão pedagógica

O acidente na usina nuclear de Fukushima, no Japão, em abril de 2011, disparou alertas sobre os riscos de acidentes nucleares para a saúde humana. O acidente liberou altas doses de elementos radioativos na água e no solo da área, fazendo com que milhares de sobreviventes do tsunami que sofreram um acidente na fábrica deixassem suas casas na área. Entre os elementos radioativos liberados no acidente estão o Iodo 131, o Césio 137 e o Estrôncio 90, que causaram sérios danos à saúde humana, como a neoplasia.

Em abril de 2011, foram detectados 570 becquerels de Estrôncio 90 por kg de solo na área onde está localizada a usina nuclear de Fukushima, o que equivale a cerca de 130 vezes a concentração normal de solo na área. Determine qual será a concentração de estrôncio 90 após 116 anos, e saiba que a meia-vida desse elemento é de 29 anos. Depois disso, verifique se a concentração no solo nesta área ficará próxima do normal.

Solução: Utilizando a expressão para o cálculo, temos:

$$M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}, com\ \alpha = \frac{ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$$

Temos que: $\alpha = \frac{ln(2)}{29}$. Logo,

$$M(116) = 570. e^{-\left(\frac{ln(2)}{29}\right).116} = 35,625$$

Portanto, depois de 116 anos, a concentração será de 35,625 becquerels de Estrôncio 90/kg de solo da usina de Fukushima.

A concentração considerada ideal é de 4,38 becquerels de Estrôncio 90/kg de solo, deste modo o valor encontrado está distante da concentração normal. Para conseguirmos a concentração normal, será necessário:

$$4,38 = 570. e^{-\left(\frac{ln\,(2)}{29}\right).t}$$

Aplicando ln de ambos os lados temos que:

$$ln\left(\frac{4,38}{570}\right) = \frac{ln\,(2).t}{29} . ln\ e$$

$$t = 203,64 \text{ anos.}$$

Portanto, seriam necessários 203,64 anos para a concentração de Estrôncio 90/kg de solo, voltasse ao normal na região de Fukushima.

### 3.4.2 O método Carbono-14

O químico Willard Libby fez uma descoberta que mudaria a história da arqueologia durante sua pesquisa em 1947. Ele descobriu que o conteúdo de carbono 14 nos tecidos dos cadáveres diminuiu em uma taxa constante ao longo do tempo. Portanto, medir os valores de radioisótopos em objetos fósseis pode nos fornecer pistas muito precisas sobre o ano após sua morte.

O carbono 14, indicado por $C^{14}$, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido aos raios cósmicos que bombardeiam a Terra. Com o tempo, a quantidade de $C^{14}$ na atmosfera permaneceu constante porque sua produção é compensada por sua decomposição. Os seres vivos absorvem e perdem $C^{14}$ de modo que, em cada espécie, a taxa de $C^{14}$ também se mantém constante.

O carbono 14 é produzido nas plantas durante a fotossíntese e é absorvido pelos animais por meio da ingestão direta ou indireta das plantas.

Quando a criatura morre, a absorção para, mas o $C^{14}$ continua a se decompor. Este fato pode ser usado para determinar a idade de fósseis ou objetos de madeira muito antigos. Para isso, precisamos saber que a meia-vida de $C^{14}$ é de 5.570 anos.

Portanto, sua taxa de decaimento é determinada da seguinte forma: Seja α a taxa de decaimento de um dado elemento radioativo, quando a meia-vida t0 do elemento é conhecida. Então sabemos que a massa deste elemento é reduzida pela metade em t0, então:

$$M(t) = \frac{M_0}{2}$$

Cabe salientar que,

$$M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}$$

Assim, temos:

$$\frac{M_0}{2} = M_0 . e^{-\alpha t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\alpha t_0}$$

Aplicando logaritmo de ambos os lados:

$$ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln\left(e^{-\alpha t_0}\right)$$

$$ln1 - ln2 = -\alpha t_0$$

$$- ln\, 2 = -\alpha t_0$$

$$ln\, 2 = \alpha t_0$$

$$\alpha = \frac{ln\, 2}{5570} = \frac{0,6931}{5570} = 0,0001244$$

### 3.4.3 Sugestão pedagógica

Vejamos como esse conhecimento foi usado para dirimir uma controvérsia. Num castelo inglês existe uma velha mesa redonda de madeira que muitos afirmavam ser a famosa Távola Redonda do Rei Artur, soberano que viveu no século V. Por meio de um contador Geiger (instrumento que mede a radioatividade) constatou-se que a massa M = M(t) de $C^{14}$ hoje existente na mesa é 0,894 vezes a massa M0 de $C^{14}$ que existia na mesa quando ela foi feita, há t anos.

Sabemos que

$$M(t) = M_0 . e^{-\alpha t}$$

Onde

$$\frac{M(t)}{M_0} = e^{-\alpha t}$$

Temos que

$$0,894 = e^{-0,0001244t}$$

$$t = \frac{-ln\, 0,894}{0,0001244} = \frac{0,1121}{0,0001244} = 901\ anos$$

Para a mesa pertencer a Távola Redonda, deveria ter idade acima de 1500 anos.

Este método é empregado frequentemente para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto bem antigo feito de madeira. Para isto é utilizado um isótopo radioativo do carbono que é denominado carbono-14 indicado por ele tem formação na atmosfera em função do bombardeio de raios cósmicos que a terra sofre. A quantidade de na atmosfera tem se mantido constante porque sua produção é contrabalanceada pela desintegração. A quantidade de carbono-14, também, se mantém constante em cada ser vivo em virtude da absorção de alimentos ou pela fotossíntese das plantas.

### 3.4.4 Resfriamento de um corpo ou Resfriamento de Newton

Modelagens matemáticas podem ser usadas para resolver problemas observados em situações experimentais. Em muitos casos, pode-se inferir com bastante precisão que a taxa de variação da temperatura da superfície corporal é diretamente proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e seu ambiente. Para ilustrar esse princípio, destacamos o exemplo da temperatura do café na xícara, primeiro resfria rapidamente e depois resfria-se por igual, já que levando em consideração o clima tropical, ele atingirá a temperatura ambiente depois de muito tempo.

Para compreender a aplicação prática das mudanças de temperatura em objetos refrigerados coletados por Isaac Newton (1643-1727), basta considerar a importância de determinar o momento da morte de um cadáver durante a investigação de um homicídio.

Os conceitos térmicos e de troca de calor explorados na física e na química são usados para estimar o tempo até a morte por meio da análise do resfriamento corporal (fenômeno conhecido por algor mortis). Após a morte e a consequente falha do sistema termorregulador, o corpo tende a equilibrar sua temperatura com a temperatura ambiente.

Além disto, a lei de resfriamento de newton tem grande aplicabilidade no campo das engenharias, a qual pode ser empregada na construção civil, processos termodinâmicos e uma grande variedade, principalmente no curso de engenharia de alimentos (PEREIRA E BARBOZA, 2018).

Conforme afirmado em Alitolif (2011), a lei do resfriamento de Newton é uma aplicação de equações diferenciais para resolver problemas relacionados às mudanças de temperatura.

Na indústria de alimentos, Silva (2014) afirma que a aplicação de equações diferenciais pode se referir à preservação relacionada ao resfriamento de materiais biológicos. Entre os vários métodos de preservação de materiais, o resfriamento é amplamente utilizado porque pode preservar as propriedades s e necessárias para esses materiais no estado natural quase inalterado.

O modelo matemático para a lei de resfriamento de Newton que trata das trocas de calor de um corpo com o meio ambiente e estabeleceu que o resfriamento obedece a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dT}{dt} = k.\left(T - T_a\right)$$

Desta forma, cabe destacar que a taxa de mudança da temperatura de resfriamento ou taxa de resfriamento (por exemplo, em ˚C / s ou K / s) é proporcional à constante de proporcionalidade e à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente.

Essa é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem (EDO), e podemos resolvê-la pelo agrupamento de variáveis:

$$\frac{dT}{dt} = k.\left(T - T_a\right) \rightarrow \frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = k.dt$$

Integrando ambos os lados, teremos:

$$\int \frac{dT}{\left(T - T_a\right)} = \int kdt \rightarrow ln\left|T - T_a\right| = k.t + c$$

Da propriedade fundamental dos logaritmos, temos que:

$$log_b a = c \leftrightarrow b^c = a$$

Aplicando acima, podemos fazer:

$$ln\left|T - T_a\right| = k.dt \rightarrow e^{kt+c} = T - T_a$$

Como a temperatura do corpo será sempre maior que a do ambiente, o logaritmando será sempre positivo, e o sinal de módulo é desnecessário.

Desenvolvendo:

$$T = T_a + e^{kt+c} \rightarrow T = T_a + e^{kt}.e^{c}$$

Como $e^C$ é uma constante, a equação final fica:

$$T = T_a + Ce^{kt}$$

### 3.4.5 Sugestão pedagógica

Quando pasteurizado, o leite vai para a iogurteira e chega com temperatura em torno de 78ºC e ele é resfriado até os 40ºC, foi calculado de acordo com a lei de resfriamento de Newton, o leite pasteurizado, de temperatura inicial $T$, foi colocado em uma iogurteira de temperatura $Tm$ de certa forma que $T \neq Tm$, o corpo de maior temperatura perderá calor até que fique em equilíbrio térmico com o meio. Expressa na equação:

$$\frac{dT}{dt} =- k\left(T - T_m\right)$$

Sendo que -K é uma constante que depende de fatores como material do objeto, estado físico, viscosidade entre outros; T é a temperatura do objeto; $Tm$é a temperatura do meio ambiente; t é o tempo. Assim pode-se calcular a taxa de variação da temperatura do leite pasteurizado quando for levado à iogurteira através das expressões:

$$T = C.e^{-k.t} + T_m$$

$$T = \left(T_0 - T_m\right).e^{-k.t} + T_m$$

O leite, após o processo de pasteurização, tem temperatura inicial de 80ºC e é bombeado para iogurteira, que opera com temperatura constante de 40ºC para a fermentação. Depois de 30 minutos a temperatura do leite pasteurizado era de 71ºC. Quanto tempo levará para o leite pasteurizado alcançar o equilíbrio térmico com a iogurteira de forma natural?

Dados: $T_0 = 80°C; T_m = 40°C; t = 30min.; T = 71°C$

Para determinar a constante K, temos:

$$T = \left(T_0 - T_m\right).e^{-k.t} + T_m$$

$$T(15) \rightarrow 71°C = (80 - 40).e^{-k.(30)} + 40$$

$$71 - 40 = 40.e^{-k.(30)}$$

$$31 = 40.e^{-k.(30)}$$

$$e^{-k.(30)} = \frac{31}{40}$$

$$e^{-k.(30)} = 0,775$$

$$-30K = ln(0,775)$$

$$-30K =- 0,2548$$

$$K = \frac{-0,2548}{-30}$$

$$K = 0,00849$$

De posse da constante K, calcularemos o tempo que o leite precisará para entrar em equilíbrio térmico com a iogurteira. Considerando, T=7,1, ponto em que um corpo aproxima do equilíbrio térmico com o meio inserido, temos que:

$$40,1 = 40 + (80 - 40).e^{-0,00849.t}$$

$$40,1 - 40 = 40.e^{-0,00849.t}$$

$$0,1 = 40e^{-0,00849.t}$$

$$e^{-0,00849.t} = \frac{0,1}{40}$$

$$e^{-0,00849.t} = 0,0025$$

$$-\ 0,00849t\ =\ ln(0,0025)$$

$$-\ 0,00849t\ =-\ 5,99$$

$$t\ =\frac{-5,99}{-0,00849}$$

$$t\ =\ 705,70\ min. \rightarrow t\ =\ 11,76\ horas$$

Desta forma, a lei de resfriamento de Newton ajuda a prever o tempo que leva para atingir a temperatura do leite para inocular o fermento lácteo, para este problema proposto, o tempo é de 11,76 horas.

De maneira semelhante ao processo da desintegração radioativa, o resfriamento de um corpo obedecerá à Lei de resfriamento de Newton, que satisfeitas às condições acima, a diferença de temperatura D, entre o objeto e o meio que o contém decresce respeitando uma taxa proporcional a diferença entre as temperaturas.

# 4 CONCLUSÃO

De forma geral, o objetivo das aplicações logaritmos é observar e analisar, entre outros aspectos, como a matemática em uma escola pode ser abordada desde à educação fundamental com as barras de Napier até exemplos mais completos como o resfriamentos de corpos (de Newton) e diante de inúmeras aplicações; atentar para quais impactos dentro da interdisciplinaridade, podem ser mais construtivas no quesito ensino aprendizagem na relação com os alunos

Em vista dos argumentos apresentados, com certeza, o estudo dos logaritmos é de grande valor para a Matemática e para a comunidade que faz uso das ciências aplicadas. Nota-se que o uso e aplicação dos logaritmos se distanciaram em muito do propósito inicial apresentados por Napier e Briggs que buscavam transformar multiplicações e divisões em soma e subtração (LIMA, 2009).

Neste trabalho mostramos que os logaritmos possuem algumas propriedades que podem ser associadas a fenômenos naturais ou apenas para fins didáticos ou de aprofundamento em conceitos ligados à Matemática pura e aplicada.

É curioso e, ao mesmo tempo fascinante, que com o surgimento da função logarítmica, paralelamente despontou o número de Euler que, no que lhe diz respeito, está associado a diversas situações como, por exemplo, na matemática financeira quando se trata de juros contínuos (LIMA, 2009).

Percebemos que o estudo dos logaritmos criou uma ferramenta tão preciosa, funcional e fascinante que até hoje sua aplicação se faz muito presente em estudos que dizem respeito a fenômenos naturais e na matemática financeira, tema este que está mais presente na vida do aluno quando este é considerado um consumidor em potencial.

Assim como os logaritmos, o avanço da Informática ou das calculadoras começou da necessidade de transformar os laboriosos cálculos matemáticos em algo menos tedioso. Deve-se entender que a tecnologia está aí para melhorar ou para facilitar a nossa vida. É estranho, mas podemos afirmar que o estudo dos logaritmos já não é hoje mais um tema de destaque nas escolas, porém vale lembrar os alunos da sua importância e as suas aplicações, valorizando o desenvolvimento da tecnologia e dando atenção a conceitos matemáticos que são e foram essenciais para o avanço tecnológico da humanidade.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOUGART, J. K. **História da álgebra**, tradução Hygino H. Domingues. São Paulo, 1992.

BOYER, Carl B. **História da Matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acessado: 13 ago. 2022.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos Coleção do Professor de Matemática**, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1996.

GE MATEMÁTICA. **Terremotos: logaritmos**: vestibular + ENEM, São Paulo, ed. 6, p. 68-75, 2014.

MARTINS, M. M. **Logaritmo**. Trabalho de conclusão de curso no Curso de Matemática da Universidade Federal De Santa Catarina, 2000.

PECORARI, M. **Logaritmo e aplicações**. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", 2013.

RUSSELL, John B.; **Química Geral vol.1**, São Paulo: Pearson Education do Brasil, Makron Books, 1994.

SILVA, V. V. **A história dos logaritmos e suas aplicações no dia- a- dia**. Trabalho de conclusão de curso de pós-graduação no Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.

VASCONCELOS, K. W. C. **Logaritmos e suas aplicações**. Trabalho de conclusão de curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, 2011.

TODA A MATEMÁTICA; Disponível em: https://youtube.com/playlist?list=PLbVzJTKmXUiZMoWFTJ6KRO3zYsv6h3Jq4

BNCC; Diponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf